демек, $$f(x)=-\frac{x}{2}+\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^5-n}, -\pi< x <\pi \qquad (53)$$

Мұнан (53) қатардың (52) қатарға қарағанда әлдеқайда жылдам жинақталатынын көреміз.

№29-30 ДӘРІС. ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛЫ, ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛЫНЫҢ КОМПЛЕКС ТҮРІ. ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІ.

Дәрістің мақсаты: Көмекші теңдіктерді қорытып шығару, ақырсыз аралық үшін Риман леммасын дәлелдеу. Фурье интегралы ұғымын меңгеру, Фурьенің екі еселі интегралын, Фурье интегралының комплекс түрін меңгеру. Фурье түрлендірулерін, олардың қасиеттерін білу.

Егер периоды $2l$ периодты функция қарастырсақ, онда $[-l, l]$ кесіндісінде ортонормаланған негізгі тригонометриялық жүйе

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \dots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \dots \qquad (54)$$

арқылы, ал оның Фурье қатары

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\cos k\pi x}{l}+b_k\frac{\sin k\pi x}{l} \qquad (55)$$

түрінде және мұның Фурье коэффициенттері

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\ ,\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi \qquad (56)$$

түрінде жазылар еді.

Енді $f(x)$ функциясының Фурье қатарына жіктелу $[-l, l]$ кесіндісін шексіз созсақ, яғни $l\to+\infty$ десек, онда Фурье қатары Фурье интегралына айналады.

Сонымен, айталық, $f(x)$ функциясы бүкіл сан өсінде берілген және $[-l, l]$ ақырлы кесіндіде құрама-жатық болсын. Онда (55), (56) формулалар орынды, егер x нүктесі $[-l\ ,\ l]$ кесіндісінің ішкі нүктесі және ол нүктеде $f(x)$үзіліссіз болса, ал егер ол ішкі нүктеде $f(x)$ функциясы үзілісті болса, онда (55) формуланың сол жағына $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ деп қою керек.

Ал (56) еселеуіштері (55) теңдікке қойсақ,

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}(\xi-x)d\xi \qquad (57)$$

Сонымен бірге $f(x)$ бүкіл сан өсінде абсолютті интегралданатын болса, яғни

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \prec +\infty \qquad (58)$$

болса , онда $l \to +\infty$ жағдайында (58) негізінде (57) формуланың бірінші қосылғышы нөлге ұмтылады, демек,

$$f(x) = \lim_{l\to+\infty} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}(\xi - x)d\xi \qquad (59)$$

Егер $\frac{k\pi}{l} = \lambda_k$, $\frac{\pi}{l} = \Delta\lambda_k$ десек, онда (59) былай

$$f(x) = \lim_{l\to+\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\lambda_k \int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\lambda_k(\xi - x)d\xi \qquad (60)$$

жазылар еді. Мұндағы l шексіздікке ұмтылғанда $\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\lambda_k(\xi - x)d\xi$ интегралын $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda_k(\xi - x)d\xi$ интегралымен ауыстырып, ал $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta\lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda_k(\xi - x)d\xi$ қосындысы $\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi$ интегралы үшін интегралдық қосынды екенін ескерсек, (60) теңдіктен

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi \qquad (61)$$

аламыз. Мұнда да, егер x нүктесі $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі болса, онда сол жағындағы $f(x)$ орнына $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ деп жазамыз. Мұның оң жағындағы интегралды Фурье интегралы деп атайды , ал (61) формуланың өзін Фурье интегралдық формуласы деп атайды.

Фурье интегралдық формуласын негіздеу

1-Теорема. Егер $f(x)$ функциясы x өсінің әрбір ақырлы кесіндісінде құрама-жатық, ал бүкіл x өсінде абсолютті интегралданса, онда

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{l} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad (62)$$

Дәлелдеу. Ең алдымен λ параметрінен тәуелді $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi$ интегралының бірқалыпты жинақты екенін байқаймыз, өйткені $0<\lambda<+\infty$ параметр мәндерінде $|f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)| \le |f(\xi)|$, ал $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|d\xi \prec \infty$. Демек, интегралдар орындарын ауыстыруға болады: